TTÜ

Funktsionaalanalüüsi elemendid
YMM 5010

Referaat:

Stieltjesi integraal

Üliõpilane: Rait Rand
Õppejõud: F. Vichmann

Sisukord

1. Sissejuhatus.


Pilt 1. Thomas Jan Stieltjes

Thomas Jan Stieltjes olles (1856 – 1894) olles õppinud ehitus-inseneriks ning projekteerinud ka mitmeid tuntud sadamad Rotterdamis sai hilisemas matemaatiku karjääris veelgi tuntumaks oma matemaatiliste uurimustega. Terve oma matemaatiku karjääri suhtles ta väga tihedalt Charles Hermite'ga kelle soovitusel anti Stieltjesile Leideni Ülikooli teaduskraadi matemaatikas ja astronoomias.

Üks probleemidest millega Stieltjes tegeles oli ebaühtlase jaotusega kujundi masskeskme koordinaatite leidmine. Nagu teada, kujundi K masskeskme koordinaadid saab avaldada Riemanni integraali kaudu eeldusel, et kujundi K mass on kõikjal ühtlane. Samas aga ei pruugi vaadeldava kujundi K mass olla kõikjal ühtlane ning siis ei saa Riemanni integraali enam pruukida. Sellele probleemile leidis 1894. a. lahenduse hollandi matemaatik Thomas Jan Stieltjes andes Riemanni integraalile üldistuse, mis on kirjeldatav kahe funktsiooniga $f(x)$ ja $g(x)$ ning mis võimaldab kujundi K masskeskme koordinaatide arvutamise suvalise massijaotuse korral.

2. Abiteoreemid ja –mõisted.

2.1.Tõkestatud muuduga funktsioonid.

Olgu meil pidev sirgestuv joon AB, mis on antud parameetriliselt võrranditega

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t) \ \ (t \in [\alpha, \beta]).$$

Teatavasti on pidev joon sirgestuv parajasti siis, kui tema kõõlmurdjoonte $P_0P_1P_2...P_{n-1}P_n$ pikkused on tõkestatud, s.o. kui

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i-1}P_i \le M, \tag{2.1}$$

kus M on mingi konstant. Kui punkt P_i vastab parameetri t väärtusele t_i, siis

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}.$$

Et

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \le P_{i-1}P_i, \ \ |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \le P_{i-1}P_i,$$

Siis tingimusest (2.1) saame

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \le M, \ \ \sum_{i=1}^{n} |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \le M. \tag{2.2}$$

Ümberpööratult, võrratustest (2.2) järeldub tingimus (2.1). Tõepoolest, liites võrratused (2.2), saame

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\right|+\left|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})\right|\right]\le 2M.$$

Et $(u+v)^2 = u^2+v^2+2uv,$ siis $u\ge 0,$ $v\ge 0$ korral $u^2+v^2\le (u+v)^2$, millest $\sqrt{u^2+v^2}\le u+v.$ Võttes $u=\left|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\right|,$ $v=\left|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})\right|,$ võime kirjutada

$$P_{i-1}P_i\le\left|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\right|+\left|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})\right|,$$

millest

$$\sum_{i=1}^{n}P_{i-1}P_i\le 2M.$$

Seega on pidev joon AB sirgestuv parajasti siis, kui on täidetud tingimused (2.2).

Definitsioon 1. Kui lõigus $[a,b]$ määratud funktsioon $g(x)$ rahuldab selle lõigu iga alajaotuse

$$x_0=a<x_1<x_2<...<x_{n-1}<b=x_n$$

puhul tingimust

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g(x_i)-g(x_{i-1)}\right|\le M,$$

siis üteldakse, et $g(x)$ on tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$.

See tähendab, et pidev joon AB on sirgestuv parajasti siis, kui funktsioonid $\varphi(t)$ ja $\psi(t)$ on tõkestatud muuduga lõigus $[\alpha,\beta]$.

Tõkestatud muuduga funktsioonide hulka kuulub iga monotoonne funktsioon. Kui funktsioon $g(x)$ on näiteks monotoonselt kasvav lõigus $[a,b]$, siis $g(x_i)-g(x_{i-1})\ge 0$ ja seega $\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|=g(x_i)-g(x_{i-1}).$ Järelikult

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|=\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)-g(x_{i-1})\right]=g(b)-g(a),$$

ja seega võime võtta $M=g(b)-g(a).$ Saab näidata, et funktsioon $g(x)$ on tõkestatud muuduga parajasti siis, kui $g(x)$ avaldub kahe monotoonselt kasvava funktsiooni vahena.

Samuti kuulub tõkestatud muuduga funktsioonide hulka iga funktsioon $g(x)$, mis rahuldab nn. Lipshitzi tingimust, s.o. funktsioon $g(x)$, mille puhul leidub konstant L, nii et iga x ja x' korral lõigus $[a,b]$

$$\left|g(x)-g(x')\right|\le L\left|x-x'\right|.$$

Tõepoolest, kui $g(x)$ rahuldab Lipshitzi tingimust lõigus $[a,b]$, siis

$$\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|\le L(x_i-x_{i-1})=L\Delta x_i,$$

millest

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|\le L\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=L(b-a).$$

Seega võime võtta $M=L(b-a).$

Näitame, et funktsioon $g(x)$ rahuldab Lipschitzi tingimust lõigus $[a,b]$, kui funktsioonil $g(x)$ on olemas tuletis $g'(x)$, mis on lõigus $[a,b]$ tõkestatud, ehk matemaatiliselt $|g'(x)| \le L$. Lagrange'i keskväärtuse valemi (teoreem 6) põhjal võime kirjutada

$$g(x) - g(x') = g'(\xi)(x - x'),$$

kus ξ paikneb x ja x' vahel. Järelikult

$$|g(x) - g(x')| = |g'(\xi)||x - x'| \le L|x - x'|.$$

Niisiis, iga funktsioon, millel on lõigus $[a,b]$ olemas tõkestatud tuletis, on tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$.

Toon siinkohal välja Matemaatilise analüüsi kursusest teada olevad teoreemid, mille analoogiaid kasutame ka Stieltjesi integraali teoreemides.

Teoreem 1. Piirväärtus summast on piirväärtuste summa, kui mõlemast liidetavast eksisteerib eraldi piirväärtus.

Teoreem 2. (Pidevuse aksioom) Igal ülalt tõkestatud reaalarvude hulgal on olemas ülemine raja. Analoogiliselt, igal alt tõkestatud reaalarvude hulgal on olemas alumine raja.

Teoreem 3. (Cauchy kriteerium) Suurusel y on antud protsessis lõplik piirväärtus parajasti siis, kui vastavalt igale positiivsele arvule ε leidub niisugune koht x_0, pärast mida y võnkumine on väiksem kui ε. (Siin mõistetaks suuruse y võnkumise all tema kahe väärtuse absoluutset erinevust teineteisest $|y - y'|$.)

Teoreem 4. (Cantori teoreem) Lõigus pidev funktsioon on ühtlaselt pidev selles lõigus.

Teoreem 5. Lõigus $[a,b]$ integreeruvate funktsioonide $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ korrutis on integreeruv lõigus $[a,b]$.

Teoreem 6. (Lagrange'I keskväärtusteoreem) Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigus $[a,b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a,b), siis leidub vahemikus (a,b) vähemalt üks punkt ξ, mille puhul

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Märkides $b = a + h,$ saame valemile (2.3) anda kuju

$$f(a + h) - f(a) = f'(\xi)h.$$

3. Stieltjesi integraali mõiste ja olemasolu.

Olgu antud funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ lõigus $[a,b]$, kus $a < b$. Jaotame lõigu $[a,b]$ punktidega $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{n-1}$ n osaks, kusjuures olgu

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b = x_n. \qquad (3.1)$$

Moodustame nn. Stieltjesi summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i),$$

kus $\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1})$. Olgu λ osalõikude $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,...,n)$ maksimaalne pikkus, s.o. $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

Definitsioon 2. Piirväärtust $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Stieltjesi integraaliks funktsiooni $g(x)$ järgi rajades a-st b-ni ja märgitakse sümboliga

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Erijuhul $g(x) = x + C$, kus C on mingi konstant, saame

$$\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i,$$

siit seega Stieltjesi summa ühtib funktsiooni $f(x)$ Riemanni summaga. Tähendab, Riemanni integraal kujutab Stieltjesi integraali erijuhtu, kus $g(x) = x + C$.

Järjestatud suuruse piirväärtuse definitsiooni kohaselt kirjutis

$$I = \int_a^b f(x)dg(x)$$

ütleb, et vastavalt igale kindlale positiivsele arvule ε leidub niisugune positiivne arv δ, et

$$|\delta - I| < \varepsilon,$$

kui $\lambda < \delta$. Ülemine võrratus peab kehtima lõigu $[a,b]$ kõigi niisuguste alajaotuste (3.1) puhul, kus $\lambda < \delta$, sõltumata jaotuspunktidest x_i ja punkti ξ_i valikust osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,...,n)$. Teiste sõnadega, vahe $\sigma - I$ on lõpmata väike suurus protsessis $\lambda \to 0$, sõltumata jaotuspunktidest x_i ja punkti ξ_i valikust osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$.

Kuna Stieltjesi integraal kujutab Stieltjesi summa piirväärtust, saab elementaarselt näidata mõned Stieltjesi integraali omadused:

1) $$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dg(x) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [f_1(x_i) + f_2(x_i)]\Delta g(x_i) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=1}^n f_1(x_i)\Delta g(x_i) + \sum_{i=1}^n f_2(x_i)\Delta g(x_i)\right] \overset{Teoreem 1}{=}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f_1(x_i)\Delta g(x_i) + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f_2(x_i)\Delta g(x_i) = \int_a^b f_1(x)dg(x) + \int_a^b f_2(x)dg(x).$$

2) Analoogiliselt saadakse, et

$$\int_a^b f(x)d[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) + \int_a^b f(x)dg_2(x)$$

3) $$\int_a^b cf(x)dg(x) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n cf(x_i)\Delta g(x_i) = \lim_{\lambda\to 0} c\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta g(x_i) =$$

$$= c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta g(x_i) = c\int_a^b f(x)dg(x).$$

Kus c on suvaline konstant

4) $$\int_a^b f(x)d[cg(x)] = c\int_a^b f(x)dg(x).$$

Siinjuures paremal olevate integraalide olemasolust järeldub vasakul seisvate integraalide olemasolu. Kasutades omadusi 3 ja 4 juhul $c=-1$, saab kergesti näidata, et omadused 1 ja 2 kehtivad ka siis, kui märk "pluss" asendada märgiga "miinus".

Tekib küsimus, missugusel tingimusel on funktsioonil $f(x)$ olemas Stieltjesi integraal funktsiooni $g(x)$ järgi. Osutub, et täiesti analoogiliselt Riemanni integraali juhuga saab anda tarviliku ja piisava tingimuse Stieltjesi integraali olemasoluks, kui eeldada, et funktsioon $g(x)$ monotoonselt kasvab lõigus $[a,b]$. Nimelt sel korral $g(x)\geq 0$ ja Riemanni integraali puhul kasutud mõttekäigud on kergesti ülekantavad Stieltjesi integraalile.

Kõige pealt saab monotoonselt kasvava $g(x)$ korral näidata, et Stieltjesi integraali olemasoluks on tarvilik funktsiooni $f(x)$ tõkestatus lõigus $[a,b]$. Tõepoolest, kui integreeruv funktsioon $f(x)$ poleks tõkestatud lõigus $[a,b]$, siis peaks lõigu $[a,b]$ iga alajaotuse puhul leiduma osalõik $[x_{i-1},x_i]$, kus $f(x)$ ei ole tõkestatud. Fikseerime ülejäänud osalõikudes ξ_i väärtused, jättes ξ_k esialgu lahtiseks, ja valime suvalise positiivse arvu M. Et

$$\sigma = f(\xi_k)\Delta g(x_k) + \sum_{i=1,i\neq k}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i),$$

siis

$$|\sigma| \geq |f(\xi_k)|\Delta g(x_k) - m,$$

kus $m=\left|\sum_{i=1,i\neq k}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i)\right|$ ei sõltu väärtusest ξ_k. Valides ξ_k nii, et $|f(\xi_k)| > \dfrac{M+m}{\Delta g(x_k)}$, saame

$$|\sigma| > M+m-m = M.$$

Seega on suurus σ tõkestamata protsessis $\lambda\to 0$, mistõttu tal ei saa olla piirväärtust selles protsessis. Tekkinud vastuolu näitab, et $f(x)$ peab olema tõkestatud lõigus $[a,b]$.

Tõkestatud funktsioonil on aga pidevuse aksioomi põhjal (teoreem 2) igas osalõigus $[x_{i-1},x_i]$ olemas ülemine raja M_i ja alumine raja m_i. Analoogiliselt Darboux' summadega toome sisse vastavalt igale alajaotusele (3.1) summad

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta g(x_i),\quad s=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta g(x_i).$$

Neil summadel, nagu Darboux' summadelgi, on kaks järgmist omadust:

1) Alajaotuse peenendamisel uute jaotuspunktide juurdevõtmise teel ei saa ülemsumma S kasvada ega alamsumma s kahaneda.
2) Ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast.

Kasutades Cauchy kriteeriumi, saab Stieltjesi integraali olemasoluks anda järgmise tarviliku ja piisava tingimuse.

<u>Teoreem 3.1.</u> Funktsioonil $f(x)$ on olemas Stieltjesi integraal monotoonselt kasvava funktsiooni $g(x)$ järgi parajasti siis, kui

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0.$$

Siin

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta g(x_i),$$

kus $\omega_i = M_i - m_i$ kujutab funktsiooni $f(x)$ võnkumist lõigus $[x_{i-1}, x_i]$. Järgnevalt huvitab meid funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ konkreetsed klassid, mille puhul on teoreemi 3.1 tingimus rahuldatud.

<u>Teoreem 3.2.</u> Stieltjesi integraal $\int_a^b f(x)dg(x)$ on olemas, kui $f(x)$ on pidev ja $g(x)$ tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$.

<u>Tõestus.</u> Et saaks rakendada teoreemi 3.1, oletame kõige pealt, et $g(x)$ on monotoonselt kasvav lõigus $[a,b]$. Kasutades Cantori teoreemi ühtlasest pidevusest, määrame vastavalt suvalisele positiivsele arvule ε arvu δ nii, et

$$\omega_i < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}.$$

Kui lõigu $[a,b]$ alajaotuse 3.1 korral $\lambda < \delta,$ siis

$$S-s<\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta g(x_i)=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\left[g(b)-g(a)\right]=\varepsilon,$$

mis ütleb, et $\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0.$ Teoreemi 3.1 põhjal on siis Stieltjesi integraal olemas $\int_a^b f(x)dg(x)$.

Juhul, kui $g(x)$ ei ole monotoonselt kasvav, siis $g(x)$ kui tõkestatud muuduga funktsioon avaldub kahe monotoonselt kasvava funktsiooni $g_1(x)$ ja $g_2(x)$ vahena, $g(x)=g_1(x)-g_2(x).$ Eelnenu põhjal on olemas Stieltjesi integraalid

$$\int_a^b f(x)dg_1(x),\ \int_a^b f(x)dg_2(x)$$

ja siis ka integraal

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)dg_1(x)-\int_a^b f(x)dg_2(x).$$

Sellega on teoreem 3.2 tõestatud.

Kui funktsioon $f(x)$ pole pidev lõigus $[a,b]$, on aga integreeruv Riemanni mõttes, siis Stieltjesi integraali $\int_a^b f(x)dg(x)$ olemasoluks tuleb funktsiooni $g(x)$ kohta eeldada enam kui teoreemis 3.2.

Teoreem 3.3 Stieltjesi integraal $\int_a^b f(x)dg(x)$ on olemas, kui $f(x)$ on integreeruv Riemanni mõttes ja $g(x)$ rahuldab Lipschitzi tingimust.

Tõestus. Oletame kõigepealt, et Lipschitzi tingimust rahuldav funktsioon $g(x)$ on monotoonselt kasvav. Et

$$\Delta g(x_i) \le L\Delta x_i,$$

siis

$$S - s \le L\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

Funktsiooni $f(x)$ integreeruvuse tõttu $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$ ja siis ka $\lim_{\lambda\to 0}(S-s) = 0.$

Teoreemi 3.1 põhjal on siis Stieltjesi integraal $\int_a^b f(x)dg(x)$ olemas.

Juhul, kui $g(x)$ ei ole monotoonselt kasvav, siis kirjutame

$$g(x) = Lx - [Lx - g(x)] = g_1(x) - g_2(x),$$

kus

$$g_1(x) = Lx,\ \ g_2(x) = Lx - g(x).$$

Siin $g_1(x)$ on monotoonselt kasvav ja rahuldab Lipschitzi tingimust lõigul $[a,b]$. Sama võib ütelda ka funktsiooni $g_2(x)$ kohta. Tõepoolest $x < x'$ korral

$$g_2(x) - g_2(x) = Lx' - g(x') - [Lx - g(x)] = L(x'-x) - [g(x') - g(x)].$$

Kus siis

$$|g(x) - g(x')| \le L|x - x'|$$

Ja seega ühelt poolt $g_2(x) - g_2(x') \le 0$ teiselt poolt aga

$$|g_2(x) - g_2(x')| \le L|x - x'| + |g(x) - g(x')| \le L|x - x'| + L|x - x'| = 2L|x - x'|$$

Järelikult $g_2(x') - g_2(x) \ge 0$, seega $g_2(x)$ monotoonselt kasvab. Eelnenu põhjal on olemas Stieltjesi integraalid

$$\int_a^b f(x)dg_1(x),\ \int_a^b f(x)dg_2(x)$$

ning siis ka integraal

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg_1(x) - \int_a^b f(x)dg_2(x).$$

Olgu antud näiteks funktsioonid

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}.$$

Siin integraalid

$$\int_0^1 f(x)dg(x),\ \int_1^2 f(x)dg(x)$$

kindlasti eksisteerivad, sest esimesel juhul $f(x)$ on pidev ja $g(x)$ kui monotoonne funktsioon tõkestatud muuduga lõigus $[0,1]$ (teoreem 3.1), teisel juhul $f(x)$ kui monotoonne funktsioon integreeruv Riemanni mõttes, $g(x)$ aga rahuldab Lipschitzi tingimust lõigus $[1,2]$ (teoreem 3.2). Siinjuures Riemanni integraal eksisteerib, kuid Stieltjesi integraal ei eksisteeri

$$\int_0^2 f(x)dg(x)$$

Põhjenduseks jaotame lõigu $[0,2]$ n osaks nii, et punkt 1 ei oleks jaotuspunkt. Siis punkt 1 tuleb mingisse osalõiku $[x_{k-1}, x_k]$ nii et $x_{k-1} < 1 < x_k$. Moodustame Stieltjesi summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i).$$

Kui siin $i \neq k$, siis $\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) = 0$ ja seega

$$\sigma = f(\xi_k)\Delta g(x_k) = f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = f(\xi_k)(1-0) = f(\xi_k).$$

Järelikult, kui $\xi_k \leq 1$, siis $\sigma = -1$, kui aga $\xi_k > 1$, siis $\sigma = 1$, mistõttu piirväärtus $\lim_{\lambda \to 0} \sigma$ ei saa eksisteerida.

Seega ei tarvitse Stieltjesi integraali olemasolust lõikudes $[a,c]$ ja $[c,b]$ $(a < c < b)$ järelduda integraali olemasolu kogu lõigus $[a,b]$. Küll aga kehtib Stieltjesi integraali puhul valem

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x),$$

kui vasakul olev integraal eksisteerib.

4.Stieltjesi integraali arvutamine.

Vaatleme praktikas kahte kõige sagedamini esinevat Stieltjesi integraali erijuhtu.

Teoreem 4.1. Kui funktsioon $f(x)$ on Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$, funktsioonil $g(x)$ aga on olemas Riemanni mõttes integreeruv tuletis $g'(x)$, siis

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx, \tag{4.1}$$

kus paremal on Riemanni integraal.

Tõestus. Et $g'(x)$ kui Riemanni mõttes integreeruv funktsioon on tõkestatud, siis $g(x)$ rahuldab Lipschitzi tingimust, ja teoreemi 3.3 põhjal Stieltjesi integraal $\int_a^b f(x)dg(x)$ eksisteerib, sest kahe Riemanni mõttes integreeruva funktsiooni korrutis on integreeruv Riemanni mõttes (Teoreem 2.5). Jääb tõestada nende integraalide võrdsus.

Jaotame lõigu $[a,b]$ punktidega

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b = x_n$$

n osaks ja märgime osalõikude maksimaalse pikkuse tähega λ. Rakendades vahele $\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1})$ Lagrange'i keskväärtusvalemit (teoreem 6), saame

$$\Delta g(x_i) = g'(\xi_i)\Delta x_i,$$

kus $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Määrates sel viisil punktid ξ_i, moodustame valemi (4.1) vasakul pool oleva integraali jaoks Stieltjesi summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g'(\xi_i)\Delta x_i.$$

Siin teine summa aga kujutab funktsiooni $f(x)g'(x)$ Riemanni summat. Minnes viimases võrduses üle piirprotsessile $\lambda \to 0$, saamegi valemi (4.1).

Olgu lõigus $[a,b]$ antud funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$, millest esimene on pidev otspunktides a ja b, teine aga konstantne vahemikus (a,b), omades otspunktides a ja b mistahes väärtusi $g(a)$ ja $g(b)$. Vaatleme Stieltjesi integraali

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\lambda\to 0}\sigma.$$

Seose $\Delta g(x_i) = 0 \;\; (1 < i < n)$ tõttu

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = f(\xi_1)\Delta g(x_1) + f(\xi_i)\Delta g(x_n) =$$
$$= f(\xi_1)[g(x_1) - g(a)] + f(\xi_n)[g(b) - g(x_{n-1})].$$

Minnes üle piirile protsessis $\lambda \to 0$, saame

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)[g(a+) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(b-)], \tag{4.2}$$

kus funktsiooni $g(x)$ konstantsuse tõttu $g(a+) = g(b-)$.

Teoreem 4.2. Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigus $[a,b]$, funktsioon $g(x)$ aga konstantne igas osavahemikus (a,c_1), (c_1,c_2), … (c_m,b), kus $a < c_1 < c_2 < ... < c_m < b$, siis

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)[g(a+) - g(a)] + \sum_{i=1}^{m} f(c_i)[g(c_i+) - g(c_i-)] +$$
$$+ f(b)[g(b) - g(b-)]. \tag{4.3}$$

Tõestus. Et $g(x)$ on tõkestatud muuduga, siis teoreemi 3.3 põhjal on olemas integraal $\int_a^b f(x)dg(x)$, seetõttu võime kirjutada

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dg(x),$$

kus $c_0 = a$, $c_{m+1} = b$. Valemit (4.2) rakendades, saame

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \{ f(c_{i-1})[g(c_{i-1}+) - g(c_{i-1})] + f(c_i)[g(c_i) - g(c_i-)] \}.$$

Kirjutades paremal seisva summa üksikasjalikult välja, saame pärast sarnaste liikmete taandamist valemi (4.3).

Teoreem 4.3. Stieltjesi integraali puhul kehtib valem

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x),$$

(Stieltjesi integraali jaoks ositi integreerimise valem)
kusjuures ühe integraali olemasolust järeldub teise integraali olemasolu.

Tõestus. Oletame, et eksisteerib integraal $\int_a^b g(x)df(x)$. Jaotame lõigu $[a,b]$ n osaks punktidega

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b = x_n$$

ja valime igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ punkti ξ_i, kusjuures võtame $\xi_n = b$. Märkides veel $\xi_0 = a,$ moodustame integraali $\int_a^b f(x)dg(x)$ jaoks Stieltjesi summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=2}^{n+1} f(\xi_{i-1})g(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(x_{i-1}) =$$

$$= -\sum_{i=2}^{n} g(x_{i-1})\left[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})\right] + f(\xi_n)g(b) - f(\xi_1)g(a) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\left[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})\right] + g(b)f(\xi_n) - g(a)f(\xi_0)$$

ehk

$$\sigma = f(x)g(x)\Big|_a^b - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\Delta f(\xi_i). \tag{4.4}$$

Et $x_{i-1} \in [\xi_{i-1}, \xi_i]$, valemis (4.4) paremal pool olev summa kujutab funktsiooni $g(x)$ Stieltjesi summat funktsiooni $f(x)$ järgi, kui lõiku $[a,b]$ vaatleme jaotatuna n osaks punktidega

$$\xi_0 = a < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_{n-1} < b = \xi_n.$$

Olgu $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$, $\mu = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta\xi_i$. Pole raske näha, et $\mu \le 2\lambda$. Seega, kui $\lambda \to 0,$ siis ka $\mu \to 0$ ja seosest (4.4) järeldub valem (4.3), kui eeldada, et integraal $\int_a^b g(x)df(x)$ eksisteerib.

Tuletame lõpuks Stieltjesi integraali jaoks ühe võrratuse, mis on kasulik nii teoreetilistes uurimistes kui ligikaudsetes arvutustes.

Teoreem 4.4 Kui funktsioon $f(x)$ on pidev ja $g(x)$ tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$, siis kehtib võrratus

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le M \operatorname*{var}_{[a,b]} g\ , \tag{4.5}$$

kus

$$M = \max_{a \le x \le b} |f(x)|, \quad \operatorname*{var}_{[a,b]} g = \sup \sum_{i=1}^{n} |\Delta g(x_i)| .$$

<u>Tõestus.</u> Stieltjesi integraali definitsiooni kohaselt

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma,$$

kus

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi) \Delta g(x_i).$$

Et

$$|\sigma| \le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| |\Delta g(x_i)| \le M \sum_{i=1}^{n} |\Delta g(x_i)| \le M \operatorname*{var}_{[a,b]} g ,$$

siis, üle minnes piirile protsessis $\lambda \to 0$, saamegi siit võrratuse (4.5).

Suurust $\operatorname*{var}_{[a,b]} g$ nimetatakse funktsiooni $g(x)$ täismuuduks lõigus $[a,b]$.

Funktsioon $g(x)$ on tõkestatud muuduga lõigus $[a,b]$ parajasti siis, kui $\operatorname*{var}_{[a,b]} g$ on lõplik.

<u>5. Näited ning praktilised võtted Stieltjesi integraali arvutamiseks</u>

Kahjuks ei jõudnud näiteid ning praktilist rakendust tuua, kuna üllatuslikult oli TTÜ raamatukogu kinni 10.dets.2007. Näited ning praktilise rakenduse toon järgmiseks seminariks.

6. Kasutatud kirjandus

1. G. Kangro. Matemaatiline analüüs I, Tln. 1965.
2. Eelnevate aastate üliõpilaste Stieltjesi integraali referaatidest väljavõtted.